文章编号:1000-4939(2023)04-0939-08

一类带高频耗散的动力学显式算法

赵建锋,赵旭

(青岛理工大学土木工程学院,266033 青岛)

摘 要:带数值耗散的算法因其能有效过滤虚假高频响应的影响而备受关注。基于离散控制理论 Z 变换,提出一类带数值耗散的结构动力学显式算法。该算法采用 CR 法的速度和位移递推式,满足零振幅衰减率,且对线性系统和非线性刚度软化系统为无条件稳定,对刚度硬化系统则是条件稳定的;该算法由单个参数 ρ 控制数值耗散能力。通过对振幅衰减和周期延长的理论分析表明,系数 a 可调节算法的精度和非线性稳定区间,给出精度最优时系数的取值。对特定的系数取值该算法可转变为 CR 法。通过算例对线性系统和非线性系统的分析验证了新算法具有良好的精度、稳定性和数值耗散,表明新算法是正确有效的。

关键词:显式算法;数值耗散;无条件稳定;离散控制理论

中图分类号:TU311.3　　**文献标志码**:A　　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.04.025

A family of structural explicit algorithm with high-frequency dissipation

ZHAO Jianfeng,ZHAO Xu

(School of Civil Engineering,Qingdao University of Technology,266033 Qingdao,China)

Abstract:Algorithms with numerical dissipation have attracted much attention because of their ability to effectively filter the effects of false high-frequency responses. Based on the Z-transform of discrete control theory,a class of explicit time-history integral algorithm with numerical dissipation for structural dynamics is proposed. The speed and displacement recursion of CR algorithm are used in this new algorithm,which can meet the zero amplitude decay rate. It is unconditionally stable for linear systems and nonlinear stiffness softening systems,and is conditionally stable for stiffness hardening systems. A single parameter ρ is used to control the existence of numerical dissipation and the size of the dissipation capacity. Theoretical analysis of amplitude attenuation and period extension shows that the accuracy and nonlinear stability interval of the algorithm can be adjusted by the coefficient a,and the coefficient value is given when the accuracy is optimal. And the new algorithm reduces to CR method for specific coefficients. Numerical examples of linear and nonlinear systems show that the new algorithm has good accuracy,stability and numerical dis-

---

收稿日期:2021-02-05　　**修回日期**:2023-03-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51778314)
通信作者:赵建锋。E-mail:zhaojf@qut.edu.cn
引用格式:赵建锋,赵旭. 一类带高频耗散的动力学显式算法[J]. 应用力学学报,2023,40(4):939-946.
ZHAO Jianfeng,ZHAO Xu. A family of structural explicit algorithm with high-frequency dissipation[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(4):939-946.

sipation, indicating that the new algorithm is correct and effective.

Key words: explicit algorithm; numerical dissipation; unconditional stability; discrete control theory

数值积分方法在求解结构动力问题上应用广泛,通过将运动微分方程离散为差分方程求解结构在不同时刻的状态量(位移、速度和加速度)。数值积分方法包含显式法和隐式法两类[1-4]。若当前时步的状态量只由已知时步的状态量决定,算法即为显式的,有单步法和多步法[5-7];反之则为隐式算法。隐式算法如著名的 Newmark-β 法[8]和 Wilson-θ 法[9]等都具有很高的精度,且对特定参数可以满足无条件稳定,但隐式算法需要大量迭代计算,计算效率低,不适用于大型非线性结构[10]。显式算法如中心差分法虽然无需迭代,但由于是条件稳定的,时间步长的选取受到稳定界限的限制,过短的时间步长也会增加计算耗时[11]。近年来,随着拟动力试验和实时混合试验的发展,高精度、高稳定性和高效率的数值积分算法受到广泛关注,国内外学者在此方面的研究取得丰硕成果。

台湾学者 CHANG 提出无条件稳定的显式算法[12-15],提高了显式算法的计算效率,但该方法仅位移表达式为显式。随后 CHEN 和 RICLES[5,16]采用离散控制理论分析 NEWMARK 法和 CHANG 方法后,推导出位移速度双显式的无条件稳定算法(CR法)。此后离散控制理论在结构动力学算法上得到广泛应用[17-21]。杜晓琼等[18]分析 CR 法和 CHANG 方法的极点,提出一种精度可控的无条件稳定显式算法。GUI 等[22]总结 Newmark 算法的极点,利用离散控制理论推导出一类适用于复杂非线性问题的无条件稳定显式算法。TANG 等[20]以全显式传递格式推导出 Real-time Substructure Testing(RST)法,该方法应用于实时混合试验仍具有高精度[23]。尽管以上方法都为显式且无条件稳定,但不具备数值耗散,不能过滤高阶振型对结果的影响。随后 TANG 等[24]引入参数 φ 改良了 RST 算法,使其带可控的数值耗散,然而参数的引入改变了算法的稳定性。KOLAY 等[17]基于广义-α 法和 CR 法,利用离散控制理论提出无条件稳定的显式 Kolay and Ricles(KR)法,该算法可以抑制高阶虚假振型,而对低阶振型无耗散,但求解过程复杂。此外 LI 等[25]设计了由单个参数控制的无条件稳定算法,具有可控的数值耗散,但该算法为隐式的,且每一时步需要分多个子步计算。

基于离散控制理论提出一类具有可控数值耗散的无条件稳定显式新算法。本研究以算法高频耗散为条件,利用离散传递函数推导算法的参数,得到算法极点。精度和稳定性分析表明,新算法对线性问题和非线性刚度软化问题是无条件稳定的,并且可使算法满足零振幅衰减率和极小的周期延长率。最后用几个算例对新算法的性能进行数值验证。

1 显式新算法设计

1.1 设计思路

以线性单自由度系统为例进行推导,在 i 时刻单自由度系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = f_i \tag{1}$$

其中:m,c,k 分别表示质量、阻尼和刚度;$\ddot{x}_i$,$\dot{x}_i$,x_i 表示系统在 i 时刻的加速度、速度和位移;f_i 表示 i 时刻系统受到的外部激励。以式(2)作为新算法的位移、速度递推式,由于 $i+1$ 时刻的位移和速度只与 i 时刻的状态量相关,故算法是显式的。

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \dot{x}_i + \alpha \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i \\ \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \beta \Delta t^2 \cdot \ddot{x}_i \end{cases} \tag{2}$$

其中:α 和 β 为待求参数;Δt 为时间步长;x_{i+1} 和 $\dot{x}_{i+1}$ 分别表示系统在 $i+1$ 时刻的位移和速度。将式(2)代入式(1)即可得到系统在 $i+1$ 时刻的加速度。

目前已有众多学者研究离散控制理论在结构动力学算法设计上的应用,但都是在已知算法极点的情况下,进行参数的推导。本研究从不同的角度出发,以算法的数值耗散为条件,推导算法参数,最终确定算法的极点,完成新算法的设计。

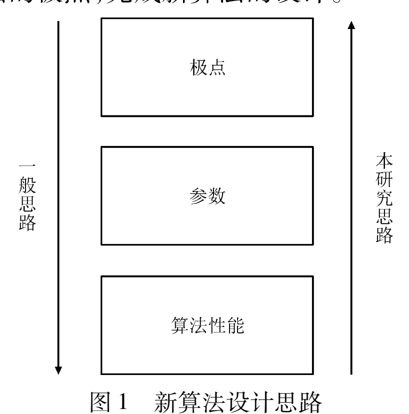


图1 新算法设计思路

Fig. 1 Design ideas of new algorithm

1.2　参数推导

利用离散控制理论对式(1)、(2)进行 Z 变换[26]，可以将算法的状态量转化为关于 Z 的二次方程。离散控制理论求得的系统极点与算法放大矩阵的特征值等价。在分析算法性能时，以代数运算代替放大矩阵的分析，达到简化计算的效果。

以系统位移和外荷载为例，对 Z 变换进行说明。位移 x 和外荷载 f 在 i 时刻的 Z 变换可表示为：$Z(x_i)=X(z)$，$Z(f_i)=F(z)$，根据位移定理[26]，$i+1$时刻系统的 Z 变换可由 i 时刻表示，即 $Z(x_{i+1})=zX(z)$。同理可得到系统速度和加速度不同时刻的 Z 变换。

离散控制理论中开环系统的传递函数由 $G(z)$ 表示，如式(3)，分子为系统输出(位移 x)的 Z 变换，分母为系统输入(外荷载 f)的 Z 变换。

$$G(z)=\frac{X(z)}{F(z)}=\frac{n_2z^2+n_1z+n_0}{d_2z^2+d_1z+d_0} \tag{3}$$

通过对式(1)、(2)的 Z 变换，得到开环传递函数的各项系数，如表 1 所示。表中 ξ 为阻尼比，$\Omega=\omega\Delta t$，ω 为系统自振频率。系统特征方程为

$$d_2z^2+d_1z+d_0=0 \tag{4}$$

特征方程的解即为传递函数的极点，与放大矩阵的特征值对应。将表(1)中的系数代入式(4)，解得极点表达式，如式(5)所示。

表 1　开环系统传递函数的系数

Tab. 1　Coefficients of transfer function of open-loop system

n 系数	n 值	d 系数	d 值
n_2	0	d_2	m
n_1	$\alpha\Delta t^2$	d_1	$m(a\Omega^2+2\beta\xi\Omega-2)$
n_0	$(\beta-\alpha)\Delta t^2$	d_0	$m[(\beta-\alpha)\Omega^2-2\beta\xi\Omega+1]$

$$p_{1,2}=1-\beta\xi\Omega-\frac{\alpha\Omega^2}{2}\pm\frac{\Omega}{2}\sqrt{\alpha^2\Omega^2+4\alpha\beta\xi\Omega+4\beta^2\xi^2-4\beta} \tag{5}$$

令极点实部和虚部分别为 $\sigma=1-\beta\xi\Omega-\frac{\alpha\Omega^2}{2}$，$\varepsilon=\frac{\Omega}{2}\sqrt{4\beta-\alpha^2\Omega^2-4\alpha\beta\xi\Omega-4\beta^2\xi^2}$，那么极点可表示为式(6)的形式，式中 i 为虚数单位。

$$p_{1,2}=\sigma\pm\varepsilon\cdot\mathrm{i} \tag{6}$$

算法的数值耗散特性由谱半径 ρ 控制，$\rho<1$ 则表示算法存在数值阻尼，即有数值耗散。由式(6)可得算法谱半径为

$$\rho=\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} \tag{7}$$

由式(5)～(7)可知，ρ 为关于算法参数 α 和 β 的函数，将 σ 和 ξ 代入式(7)，得

$$\rho=\sqrt{(\beta-\alpha)\Omega^2-2\beta\xi\Omega+1} \tag{8}$$

数值阻尼应能滤除高阶振型对系统响应的影响，同时对低阶振型的影响应尽量小，以保证精度。于是谱半径应满足以下条件

$$\Omega\to0\text{ 时},\rho=1 \tag{9a}$$

$$\Omega\to\infty\text{ 时},\rho=\rho_\infty \tag{9b}$$

ρ_∞ 表示 Ω 趋于无穷大时谱半径值，取值范围为[0,1]。显然，式(9a)是满足的。当 $\Omega\to\infty$ 时，取 $\xi=0$，则

$$(\beta-\alpha)\Omega^2+1=\rho_\infty^2 \tag{10}$$

通过式(10)可得到两个参数之间的关系，即

$$\beta-\alpha=\frac{\rho_\infty^2-1}{\Omega^2+A} \tag{11}$$

式中，A 为 Ω 的一次函数，为引入结构特性，取 $A=b(\xi\Omega+1)$，系数 b 为大于 0 的常数。参数 α 和 β 的分母为 Ω^2+A，将式(11)代入式(8)和式(9a)，得到参数 β 的表达式，再将 β 代入式(11)则得出参数 α 的表达式。

$$\alpha=\frac{a+1-\rho_\infty^2}{\Omega^2+b(\xi\Omega+1)} \tag{12a}$$

$$\beta=\frac{a}{\Omega^2+b(\xi\Omega+1)} \tag{12b}$$

式中 a、b 为系数，将在第 2 节对其进行分析。对于参数 ρ_∞ 的选取则需要考虑系统响应，若响应中包含不感兴趣的或虚假的高频分量，则建议选择较小的 ρ_∞ 值，以过滤高频分量；若响应由低频分量控制，则建议选择较大的 ρ_∞ 值，其取值应在[0,1]。

2　算法稳定性和精度分析

2.1　线性系统稳定性

线性系统稳定性通过谱半径进行分析，当谱半径 $\rho\leqslant1$ 时，算法是无条件稳定的。式(8)已给出新算法的谱半径表达式，后文的分析表明，当系数 $a=b$ 时，算法精度最优。此时算法参数如式(13)，需要指出的是当 $a=4$，$\rho_\infty=1$ 时，新算法即为 CR 法。

$$\alpha=\frac{a+1-\rho_\infty^2}{\Omega^2+a(\xi\Omega+1)} \tag{13a}$$

$$\beta=\frac{a}{\Omega^2+a(\xi\Omega+1)} \tag{13b}$$

注意到极点虚部根号部分应为非负，结合式(6)与式(7)可得到算法无条件稳定时系数 a 的取值范围为$[1+\rho_\infty-\rho_\infty\sqrt{3+\rho_\infty^2}, 1+\rho_\infty+\rho_\infty\cdot\sqrt{3+\rho_\infty^2}]$。

令 $a=1$ 将式(13)代入式(8)即可得到 ρ 与 Ω 的关系。如图2所示，阻尼的存在对算法的稳定性无影响，且随着 Ω 的增大，ρ 逐渐向 ρ_∞ 逼近，当 Ω 足够大时，$\rho=\rho_\infty$，说明新算法对线性系统为无条件稳定，且具有很好的高频耗散特性。

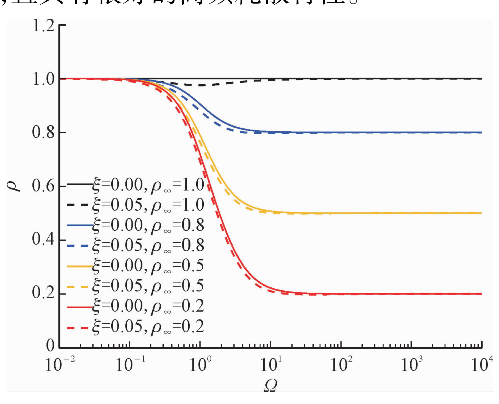


图2　新算法谱半径

Fig. 2　Spectral radius for the new algorithm

2.2　非线性系统稳定性

离散控制理论的闭环传递函数可以分析非线性系统的稳定性。非线性单自由度系统的运动方程改为增量形式如式(14)，式中 $\Delta L_i=\Delta f_i-k_t\Delta x_i$，$k_t$ 为非线性系统 t 时刻的刚度，随时间不断变化。

$$m\Delta\ddot{x}_i+c\Delta\dot{x}_i=\Delta L_i \tag{14}$$

闭环系统的传递函数可表示为

$$G(z)=\frac{\Delta X(z)}{\Delta F(z)}=\frac{G'(z)}{1+k_tG'(z)} \tag{15}$$

其中 $G'(z)$ 表达式为

$$G'(z)=\frac{n_2'z^2+n_1'z+n_0'}{d_2'z^2+d_1'z+d_0'} \tag{16}$$

式(16)中的各项系数见表2。

于是闭环系统特征方程为

$$1+k_t\frac{n_2'z^2+n_1'z+n_0'}{d_2'z^2+d_1'z+d_0'}=0 \tag{17}$$

表2　闭环系统传递函数的系数

Tab. 2　Coefficients of transfer function of close-loop system

n' 系数	n' 值	d' 系数	d' 值
n_2'	0	d_2'	m
n_1'	$\beta\Delta t^2$	d_1'	$2m(\beta\xi\Omega-1)$
n_0'	$(\alpha\gamma-\beta)\Delta t^2$	d_0'	$m(1-2\beta\xi\Omega)$

工程中常见的非线性问题包括刚度软化($0<k_t<k$)和刚度硬化($k_t>k$)两种，定义如图3所示。

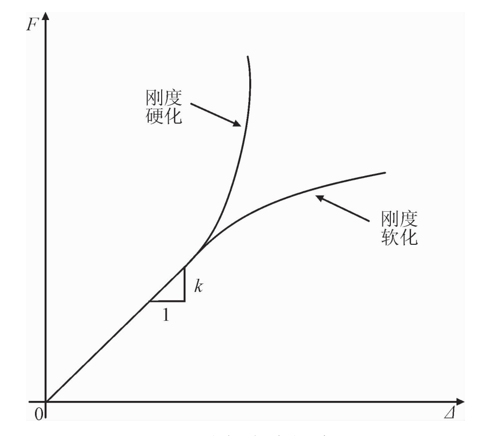


图3　刚度非线性定义

Fig. 3　Definition of stiffening and softening behavior

利用MATLAB绘制非线性系统的根轨迹图，当轨迹在单位圆上或以内则系统是稳定的。取 $a=b=1$，$\rho_\infty=1$，$\Delta t=0.2$ s，$\omega=\pi$，$m=1$，$\xi=0$，绘制根轨迹如图4所示。

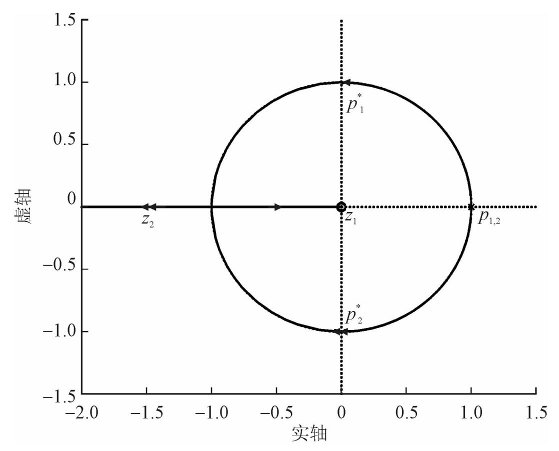


图4　$G(z)$ 根轨迹图

Fig. 4　Root locus for $G(z)$

图4中共有两条根轨迹，一条起于 $p_1=0$ 经 p_1^* 止于 z_1，另一条起于 p_2 经 p_2^* 止于 $z_2=\infty$。$p_{1,2}$ 为 $k_t=0$ 时特征方程的极点，$p_{1,2}^*$ 为 $k_t=k$ 时特征方程的极点。刚度软化系统对应的根轨迹为 $p_{1,2}\rightarrow p_{1,2}^*$，全部在单位圆上；刚度硬化系统对应的根轨迹为 $p_{1,2}^*\rightarrow z_{1,2}$，在 $z=-1$ 处穿出单位圆。故算法对于非线性刚度软化系统为无条件稳定，刚度硬化系统为条件稳定。

将 $z=-1$ 代入式(17)，可得刚度硬化系统的稳定性区间如式(18)，可以看出稳定界限与系数 a 的取值成反比而与 ρ_∞ 的取值成正比。对于无阻尼系统，非线性稳定区间只与 a 有关。

$$k_t \leqslant \frac{4m}{\Delta t^2}\left(\frac{\Omega^2}{a} - \frac{\xi\Omega}{a} + \frac{\xi\Omega}{a}\rho_\infty^2 + 1\right) \tag{18}$$

2.3　算法精度分析

一个数值算法的精度可由振幅衰减率(AD)和周期延长率(PE)两个指标衡量,定义如下。

$$\mathrm{AD} = 1 - \exp(-2\pi\bar{\xi}) \tag{19}$$

$$\mathrm{PE} = \Omega/\bar{\Omega} - 1 \tag{20}$$

其中:$\bar{\xi} = -\ln(\sigma^2 + \varepsilon^2)/\bar{\Omega}$,$\bar{\Omega} = \arctan(\varepsilon/\sigma)$。由图2可知,$\xi = 0$,$\rho_\infty = 1$ 时,谱半径恒为1,即 $\sigma^2 + \varepsilon^2 = 1$,此时 $\bar{\xi} = 0$,也就是 AD = 0。因此以 $\xi = 0$,$\rho_\infty = 1$ 分析新算法的 PE 并探讨系数 a、b 的取值。

首先分析系数取任意值时新算法的 PE,考虑 $a = 1$,$b = 1 \sim 4$ 和 $a = 2$,$b = 1 \sim 4$ 两种情况,绘制 PE 图。如图5所示,两种情况下仅当 $a = b$ 时 PE 的绝对值最小,当 $a \neq b$ 时,尽管 $\Delta t/T$ 取值足够小,PE 绝对值仍然很大。图6 ~ 7为 $a = b$ 时的 PE 图。图6可以看出,周期延长率的绝对值随系数的增加呈现先增后减的变化规律,在9 ~ 13范围内精度较高。图7为 $a = b = 9 \sim 14$ 的范围内取值的 PE 图。在 $a = b = 11$ 时,周期延长率的绝对值最小,不足0.002,精度最高。

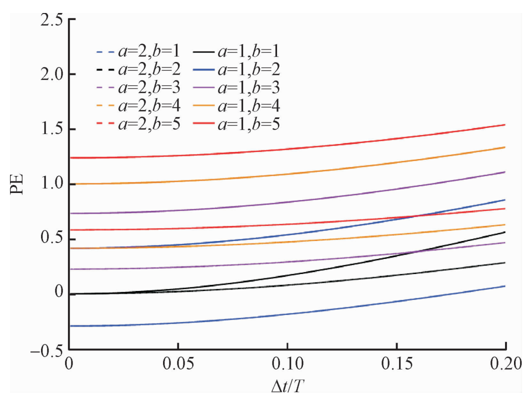


图5　任意系数的 PE

Fig. 5　PE values corresponding to arbitrary coefficient

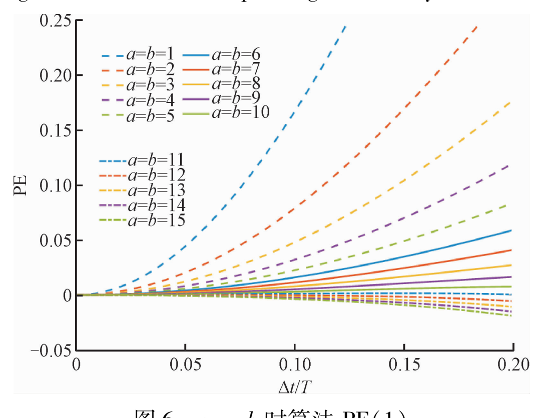


图6　$a = b$ 时算法 PE(1)

Fig. 6　PE values corresponding to $a = b$ (part 1)

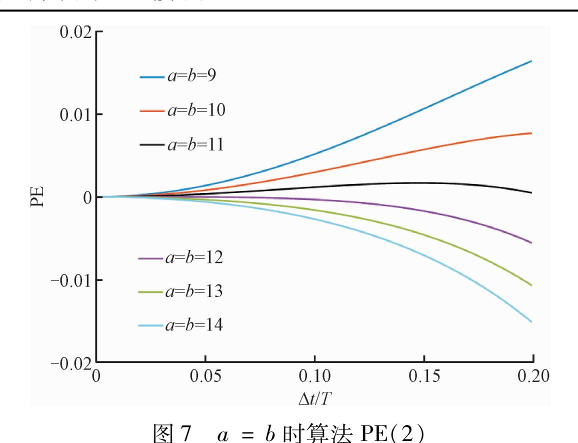


图7　$a = b$ 时算法 PE(2)

Fig. 7　PE values corresponding to $a = b$ (part 2)

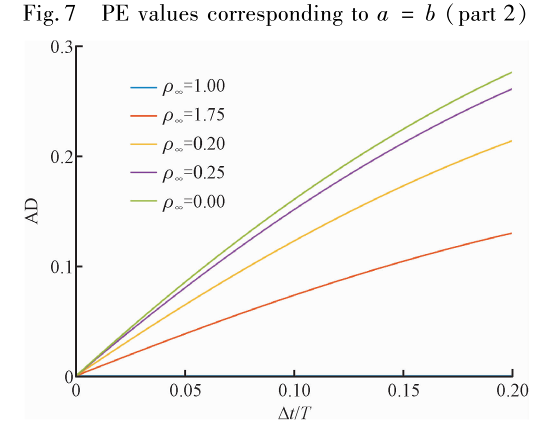


图8　$a = b = 11$ 时算法 AD

Fig. 8　AD values corresponding to $a = b = 11$

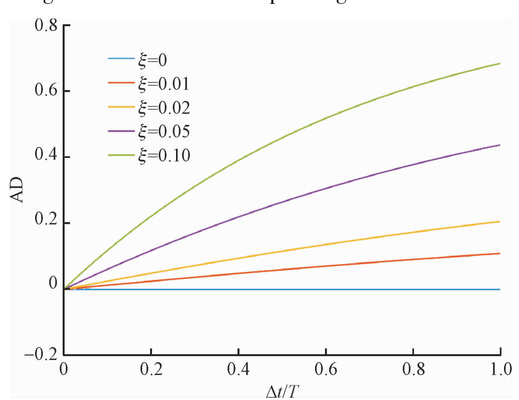


图9　不同阻尼比的算法 AD

Fig. 9　AD values with different damping ratio

结合以上分析,取 $a = b = 11$ 绘制新算法的 AD 图。由图8可知,新算法 AD 在 $\rho_\infty = 1$ 时最小且恒为0,这与前述分析一致。新算法的 AD 与 ρ_∞ 呈负相关,ρ_∞ 的取值越接近1,AD 的变化越明显。图9进一步展现阻尼比对算法 AD 的影响,$\xi = 0$ 时 AD 恒为零,随着阻尼比的增加 AD 逐渐增大。因此,系数取值为 $a = b = 11$ 且 $\rho_\infty = 1$ 时,算法精度最高,但此时新算法无数值阻尼。最终参数 α 和 β 中仅含 a 和 ρ_∞ 两个常数系数,即式(13)。

3　多自由度系统参数

多自由度系统在 i 时刻的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}_i+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}_i+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{F}_i \tag{21}$$

式中：$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为系统的质量、阻尼和刚度矩阵；$\ddot{\boldsymbol{x}}_i$、$\dot{\boldsymbol{x}}_i$ 和 $\boldsymbol{x}_i$ 分别为系加速度、速度和位移向量；$\boldsymbol{F}_i$ 为外荷载。

多自由度系统算法参数与单自由度系统的式(2)和式(12)相似，带可控数值阻尼新算法的递推式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{x}_i+\Delta t\cdot\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{\alpha}\Delta t^2\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_i\\ \dot{\boldsymbol{x}}_{i+1}=\dot{\boldsymbol{x}}_i+\boldsymbol{\beta}\Delta t^2\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}_i\end{cases} \tag{22}$$

其中参数为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a+1-\rho_\infty^2)\cdot(a\cdot\boldsymbol{M}+a/2\Delta t\cdot\boldsymbol{C}+\Delta t^2\cdot\boldsymbol{K})^{-1}\cdot\boldsymbol{M} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\beta}=a\cdot(a\cdot\boldsymbol{M}+a/2\Delta t\cdot\boldsymbol{C}+\Delta t^2\cdot\boldsymbol{K})^{-1}\cdot\boldsymbol{M} \tag{24}$$

4　算例分析

本节通过 2 个算例验证所提新算法对线性和非线性结构动力分析的精度、稳定性和数值耗散性能。

算例 1　单自由度弹簧质量阻尼系统，其质量为 $m=1$，刚度为 $k=4\pi^2$，分别取 $\xi=0$，$\xi=0.02$，初始条件 $x(0)=1.0$ m，$v(0)=0$。分析位移响应。选 CR 法和中心差分法(CD)与新算法(取 $a=11$，ρ_∞，图中为 Designed)对比，取 $\Delta t=0.1$ s，图中 Analytical为解析解。

图 10 为系统的位移响应，新算法不存在周期误差累计，周期延长率在 −4.3% 左右，与解析解吻合较好。

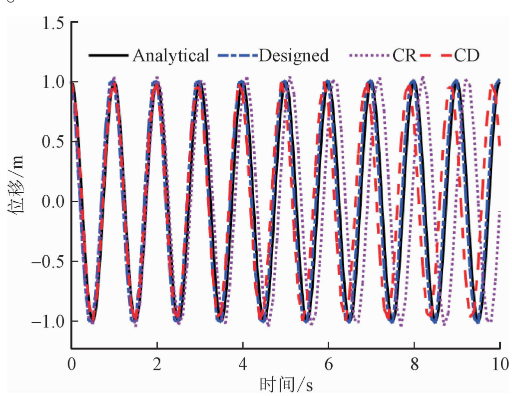


图 10　系统位移时程响应($\xi=0$)

Fig. 10　Displacement time histories of system with $\xi=0$

而 CR 法和中心差分法存在周期误差累计，CR 法为周期延长，平均周期延长率为 11.1%，极值为 27.0%；中心差分法则为周期缩短，平均周期延长率为 −8.6%，极值为 −17.0%，且随着时间增长，周期误差仍有增大的趋势。图 11 中规律与图 10 相同，阻尼的存在对新算法无周期累计误差影响，周期延长率在 −3.9% 左右。

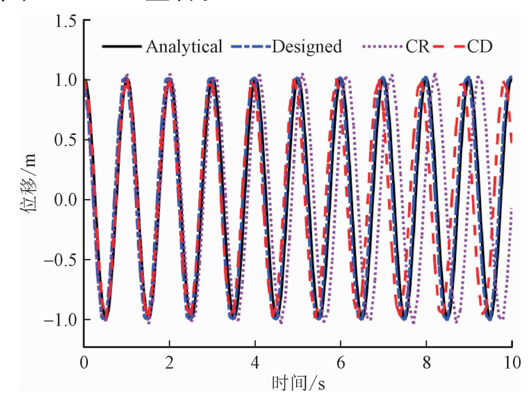


图 11　系统位移时程响应($\xi=0.02$)

Fig. 11　Displacement time histories of system with $\xi=0.02$

算例 2　分析新算法的高频耗散特性。双自由度体系的运动方程如式(25)[27]，$m_1=m_2=1$，$k_1=10^4$，$k_2=1$，自振频率 $\omega_1=1.0$，$\omega_2=100.0$，各参数均为国际单位，底层位移解析解分别为式(26)和式(27)，x_{ecact} 考虑高频响应，$x_{\text{reference}}$ 为不考虑高频响应的结果，其对应的速度为 v_{ecact} 和 $v_{\text{reference}}$。取 $\Delta t=0.02$ s，用本研究算法不同 ρ_∞ 的结果与解析解对比。

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k_1\sin(1.2t)\\ 0\end{Bmatrix} \tag{25}$$

$$x_{\text{ecact}}=\sin(1.2t)+0.0003\sin t-0.012\sin(100t) \tag{26}$$

$$x_{\text{reference}}=\sin(1.2t)+0.0003\sin t \tag{27}$$

图 12 中新算法位移计算结果与解析解吻合较好，但从图 13 局部放大图可以看出高频耗散存在与否的差别。$\rho_\infty=1.0$ 时无耗散，计算结果受高频影响明显，与 x_{ecact} 存在较大偏差，而 $\rho_\infty=0$ 时算法高频耗散强，此时的位移与 $x_{\text{reference}}$ 完全重合。算法数值耗散能力在位移时程中表现得更明显。对比图 14(a)和 14(b)的速度时程可以看出，数值阻尼的存在也使得新算法计算结果与 $v_{\text{reference}}$ 重合，且随着 ρ_∞ 的减小，即数值阻尼的增大，新算法计算结果向解析解靠近越快，表明耗散能力越强。在图14(c)中表现得尤为明显，$\rho_\infty=0.8$ 时，新算法耗时 1.5 s 才消除高频响应的影响，而 $\rho_\infty=0$ 时，仅需 0.6 s。由此可

见,新算法有良好的高频耗散能力。

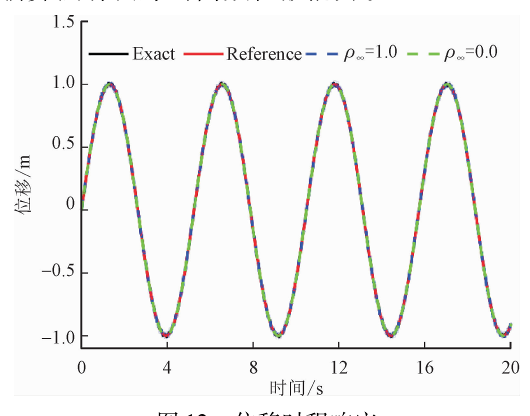


图 12　位移时程响应

Fig. 12　Time histories of displacement response

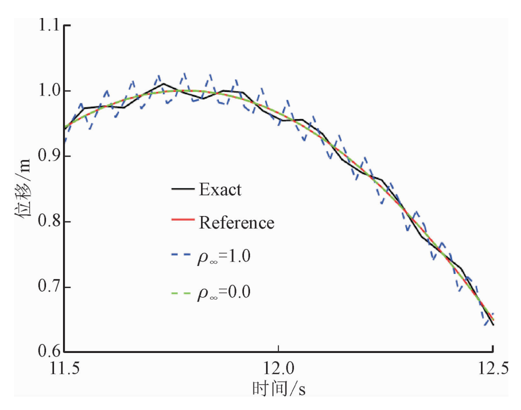


图 13　位移时程响应局部放大

Fig. 13　Local zooming view for time histories of displacement

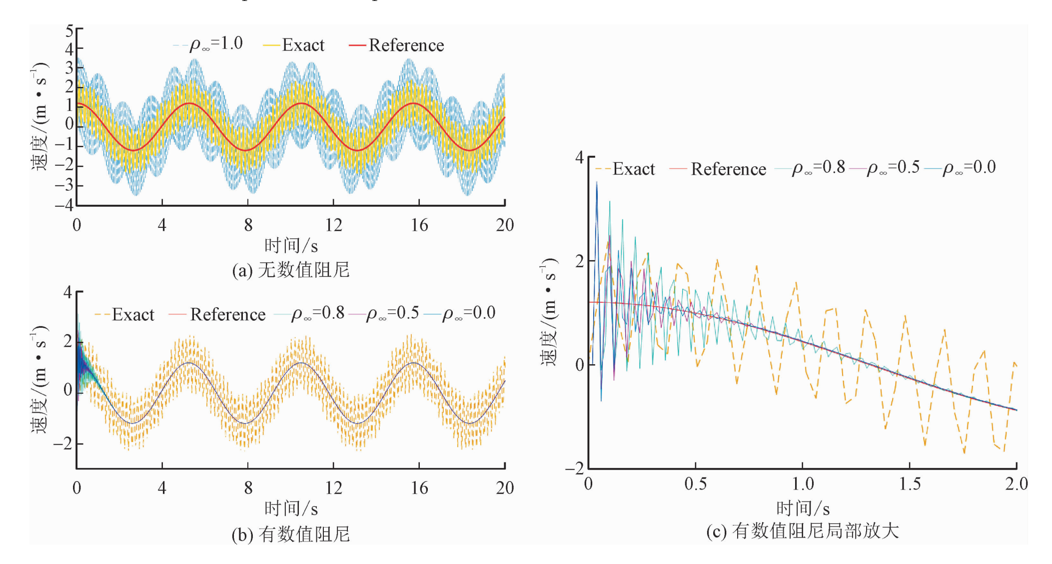


图 14　速度时程响应

Fig. 14　Time histories of velocity response

5　结　论

基于离散控制理论,采用 CR 法的位移和速度递推式,提出一类带数值耗散的结构动力学算法。结论如下。

1)新算法为显式算法,对线性系统和非线性刚度软化系统是无条件稳定的,而对非线性刚度硬化系统是条件稳定。

2)系数 a 可控制算法精度,随着系数值的增加算法精度呈先增后减的变化规律,在 $a = 11$,$\rho_\infty = 1$ 时精度最高,可满足零振幅衰减率,周期延长率小于 0.002。

3)ρ_∞ 控制算法的数值阻尼,$\rho_\infty = 1$ 时算法无数值阻尼,$\rho_\infty = 0$ 时数值阻尼最大,高频耗散最强。

4)算例分析验证了新算法的精度和稳定性,对单自由度系统周期延长率约为 −3.9%,优于中心差分法和 CR 法。

参考文献:

[1]　张伟伟,金先龙. 统一格式的显式与隐式任意混合异步算法[J]. 力学学报,2014,46(3):436-446.
ZHANG Weiwei, JIN Xianlong. An arbitrarily mixed explicit-implicit asynchronous integration algorithm based on uniform discretization format[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2014,46(3):436-446(in Chinese).

[2]　刘晶波,杜修力. 结构动力学[M]. 北京:机械工业出版社,2005.

[3]　李常青,楼梦麟,蒋丽忠. 结构动力方程求解中隐式格式向显式格式的转换[J]. 振动与冲击,2012,31(13):91-94.
LI Changqing, LOU Menglin, JIANG Lizhong. Transformation of implicit method to explicit method for solving structural dynamic equation[J]. Journal of vibration and shock,2012,31(13):91-94(in Chinese).

[4] LI J Z, YU K P. An alternative to the Bathe algorithm[J]. Applied mathematical modelling, 2019, 69: 255-272.

[5] CHEN C, RICLES J M. Development of direct integration algorithms for structural dynamics using discrete control theory[J]. Journal of engineering mechanics, 2008, 134(8): 676-683.

[6] 杨超, 朱涛, 杨冰, 等. 结构动力学中的广义多步显式积分算法[J]. 西南交通大学学报, 2017, 52(1): 133-140.
YANG Chao, ZHU Tao, YANG Bing, et al. Generalized multi-step explicit integration method in structural dynamics[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2017, 52(1): 133-140 (in Chinese).

[7] 杨超, 肖守讷, 阳光武, 等. 一类非耗散的显式时间积分方法[J]. 振动工程学报, 2015, 28(3): 441-448.
YANG Chao, XIAO Shoune, YANG Guangwu, et al. Non-dissipative explicit time integration methods of the same class[J]. Journal of vibration engineering, 2015, 28(3): 441-448 (in Chinese).

[8] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics[J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1962, 127(1): 1406-1433.

[9] WILSON E L. A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures[D]. Berkeley, CA, United States: University of California, Berkeley, 1968: 65.

[10] 孟凡涛, 赵建锋. 基于 Bathe 隐式算法的结构动力学显式算法[J]. 振动与冲击, 2019, 38(6): 226-232.
MENG Fantao, ZHAO Jianfeng. Explicit algorithm for structural dynamics based on the Bathe implicit algorithm[J]. Journal of vibration and shock, 2019, 38(6): 226-232 (in Chinese).

[11] 文颖, 陶蕤. 基于加速度泰勒展开的动力学方程显式积分方法[J]. 工程力学, 2018, 35(11): 26-34.
WEN Ying, TAO Rui. An explicit time-domain integration scheme for solving equations of motion in structural dynamics based on a truncated taylor expansion of acceleration[J]. Engineering mechanics, 2018, 35(11): 26-34 (in Chinese).

[12] CHANG S Y. Explicit pseudodynamic algorithm with unconditional stability[J]. Journal of engineering mechanics, 2002, 128(9): 935-947.

[13] CHANG S Y. Enhanced, unconditionally stable, explicit pseudodynamic algorithm[J]. Journal of engineering mechanics, 2007, 133(5): 541-554.

[14] CHANG S Y. Family of structure-dependent explicit methods for structural dynamics[J]. Journal of engineering mechanics, 2014, 140(6): 06014005.

[15] CHANG S Y. Elimination of overshoot in forced vibration responses for Chang explicit family methods[J]. Journal of engineering mechanics, 2018, 144(2): 04017177.

[16] CHEN C, RICLES J M. Stability analysis of direct integration algorithms applied to MDOF nonlinear structural dynamics[J]. Journal of engineering mechanics, 2010, 136(4): 485-495.

[17] KOLAY C, RICLES J M. Development of a family of unconditionally stable explicit direct integration algorithms with controllable numerical energy dissipation[J]. Earthquake engineering & structural dynamics, 2014, 43(9): 1361-1380.

[18] 杜晓琼, 杨迪雄, 赵永亮. 一种无条件稳定的结构动力学显式算法[J]. 力学学报, 2015, 47(2): 310-319.
DU Xiaoqiong, YANG Dixiong, ZHAO Yongliang. An unconditionally stable explicit algorithm for structural dynamics[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2015, 47(2): 310-319 (in Chinese).

[19] REZAIEE-PAJAND M, HASHEMIAN M. Time integration method based on discrete transfer function[J]. International journal of structural stability and dynamics, 2016, 16(5): 1550009.

[20] TANG Y, LOU M L. New unconditionally stable explicit integration algorithm for real-time hybrid testing[J]. Journal of engineering mechanics, 2017, 143(7): 04017029.

[21] 郭豪鑫, 吴春利. 一族无条件稳定的显式结构动力学算法[J]. 振动与冲击, 2020, 39(12): 48-56.
GUO Haoxin, WU Chunli. A family of unconditionally stable explicit algorithms for structural dynamics[J]. Journal of vibration and shock, 2020, 39(12): 48-56 (in Chinese).

[22] GUI Y, WANG J T, JIN F, et al. Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability[J]. Nonlinear dynamics, 2014, 77(4): 1157-1170.

[23] 唐玉, 覃晖. 实时子结构试验中显式算法对比分析[J]. 工程力学, 2020, 37(增刊1): 1-5, 12.
TANG Yu, QIN Hui. Comparisons of model-based explicit integration algorithms in real-time substructure testing[J]. Engineering mechanics, 2020, 37(S1): 1-5, 12 (in Chinese).

[24] TANG Y, REN D W, QIN H, et al. New Family of Explicit structure-dependent integration algorithms with controllable numerical dispersion[J]. Journal of engineering mechanics, 2021, 147(3): 04021001.

[25] LI J Z, YU K P. A novel family of composite sub-step algorithms with desired numerical dissipations for structural dynamics[J]. Archive of applied mechanics, 2020, 90(4): 737-772.

[26] OGATA K. 离散时间控制系统[M]. 蔡涛, 张娟, 译. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2014.

[27] KIM W. A new family of two-stage explicit time integration methods with dissipation control capability for structural dynamics[J]. Engineering structures, 2019, 195: 358-372.

(编辑 张璐)